UTTARAKHAND OPEN UNIVERSITY, HALDWANI (NAINITAL)
उत्तराखंड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी (नैनीताल)

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)
(MATHEMATICS)
ASSIGNMENT-Second YEAR

Last Date of Submission: जमा करने की अन्तिम तिथिः 15 May

Course Title: वास्ततिक विश्लेषण एवं दूरीक समष्टि

Course Code: MT04

Year: 2013-14 **Maximum Marks : 20**

Section 'A'
भाग क

Section 'A' contains 08 short answer type questions of 5 marks each. Learners are required to answers 4 questions only. Answers of short answer-type questions must be restricted to 250 words approximately.

भाग क में आठ लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये है, इनमें से केवल चार प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न के लिए 5 अंक निर्धारित है तथा प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक नही होना चाहिए।

Attempt any four questions:
कुल चार प्रश्न हल कीजिए:

1. A Sequence is Convergent iff it is a Cauchy sequence.

   एक अनुक्रम अभिसारी होती है यदि और केवल यदि यह कोशी अनुक्रम हो।

2. If a function f is continuous in [a, b] and f (a) and f (b) are of opposite sign then at least one c exist in (a, b), such that f(c)=0

   फलन f, संवृत अन्तराल [a, b] में सतत् है तथा f (a), f (b) विपरीत चिन्ह के हैं तो विवृत अन्तराल [a, b] में न्यूनतम एक बिन्दु c इस प्रकार अवश्य होता है कि f(c)=0

3. Prove that every monotonically increasing function is always Riemann integrable.

   सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है।

4. Show that the series

$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+\cdots \textit{ is uniformly convergent in } (-1,1)$$

प्रदर्शित कीजिये कि श्रेणी $\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+\cdots$ अन्तराल (-1,1) में एक समान अभिसारी है।

5. Let (x, d) be a metric space and D is define on X by

$$D(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \qquad \forall\ x,y \in X$$

Show that (X, D)is a metric space

माना कि (x, d) एक दूरीक समष्टि है तथा D, X पर निम्न प्रकार परिभाषित है

$$D(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \qquad \forall\ x,y \in X$$

प्रदर्शित कीजिये कि (X, D) एक दूरीक समष्टि है।

6. On any metric space (x, d), show that

$$\overline{A\ U\ B}=\overline{A}\ \ U\ \ \overline{B}$$

(x, d) दूरीक समष्टि में प्रदर्शित कीजिये कि

$$\overline{A\ U\ B}=\overline{A}\ \ U\ \ \overline{B}$$

7. Show that the function

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3x}{x^2+y^6}, & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

is discontinuous at (0, 0)

सिद्ध कीजिये कि फलन

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3x}{x^2+y^6}, & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

मूल बिन्दु पर असंतत् है।

8. State and prove second mean value theorem.

   द्वितीय मध्यमान प्रमेय को लिखें तथा सिद्ध करें।

Section 'B'
भाग ख

• **Section 'B' contains 04 long answer-type questions of 10 marks each. Learners are required to answers 02 questions only.**

भाग ख में चार दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये है इनमें से केवल दो प्रश्नों के उत्तर देने है। प्रत्येक प्रश्न के लिए 10 अंक निर्धाररित है।

1. Let f(x) is continuous is closed interval [a, b] then for given $\in >0$, closed interval [a, b] can be subdivided in to subintervals Ir, r=1,…. n such that in each subinterval Ir

   $$|f(x_1) - f(x_2)| < \in \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \text{Ir}$$

   माना फलन f संवृत अन्तराल [a, b] पर संतत् है। तब प्रत्येक $\in >0$ के संगत अन्तराल [a, b] को परिमित उपअन्तरालों Ir, r=1,…. n में इस प्रकार विभाजित कर सकते हैं कि प्रत्येक उपअन्तराल Ir में $|f(x_1) - f(x_2)| < \in \qquad \forall\, x_1, x_2 \in$ Ir

2. Show that necessary and sufficient condition that $f(x)$ defined on [a, b] is Riemann integrable is if for given $\in >0$,
   $U(P, f) - L(P, f) < \in$, for some P partition

   संवृत अन्तराल [a, b] पर परिभाषित परिबद्ध फलन f को, [a, b] पर रीमान समाकलनीय होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि प्रत्येक धनात्मक राशि $\in >0$ के लिये अन्तराल [a, b] का एक विभाजन P सदैव इस प्रकार विद्यमान है कि

   $$U(P, f) - L(P, f) < \in$$

3. Let X be a non empty set, then function
   d: X x X $\rightarrow R$ is a metric iff
   following conditions are satisfied
   (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall\, x, y \in X$
   (ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \quad \forall\, x, y, z \in X$

   माना कि एक अरिक्त समुच्चय है, तो फलन d: X x X $\rightarrow R$ एक दूरीक है यदि और केवल निम्न प्रतिबन्ध संतुष्ट हों

(iii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \quad x = y, \quad \forall\, x, y \in X$

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \quad \forall\, x, y, z \in X$

4. State and prove Bolzano- weierstrass theorem fa a set.

   वाज्जनों वाइस्ट्रास प्रमेय को एक समुच्चय के लिये लिखें तथा सिद्ध करें।